

**LISTA 2 – RENTA**

**Renta** – seria identycznych wpłat lub wypłat, dokonywanych co pewien stały, określony odcinek czasu, oprocentowanych taką samą stopą procentową. Wartość wpłat lub wypłat nazywa się wielkością strumienia pieniężnego lub płatnością, oznaczaną PMT (Payment).

**Renta płatna z dołu /zwana zwykłą/ (ordinary annuity)** - płatności występują na koniec każdego odcinka czasu.

**Renta płatna z góry (annuity due)** - płatności występują na początku każdego odcinka czasu.

**Wartość przyszła renty FVA (Future Value of Annuity)** /dla renty płatnej z góry – FVAD/ - taka wielkość kapitału na końcu ostatniego odcinka czasu, że jest ona równoważna serii płatności przy danym oprocentowaniu i danej liczbie okresów.

**Wartość obecna renty PVA (Present Value of Annuity)** /dla renty płatnej z góry PVAD/ - taka wielkość kapitału w chwili  $t = 0$ , że jest ona równoważna serii płatności przy danym oprocentowaniu i danej liczbie okresów.

	<i>renta płatna z dołu</i>	<i>renta płatna z góry</i>
<i>wartość przyszła</i>	$FVA = PMT \frac{(1+r)^n - 1}{r}$ lub $FVA = PMT * MWPR_n^r$	$FVAD = PMT \frac{(1+r)^n - 1}{r} (1+r)$ lub $FVAD = PMT * MWPR_n^r * (1+r)$
<i>wartość obecna</i>	$PVA = PMT \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^n}}{r}$ lub $PVA = PMT * MWOR_n^r$	$PVAD = PMT \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^n}}{r} (1+r)$ lub $PVAD = PMT * MWOR_n^r * (1+r)$

**Renta wieczna** - renta (zwykła) o płatnościach, które się nigdy nie kończą, a więc o nieskończenie wielu płatnościach. Można obliczyć tylko jej wartość obecną, wartości przyszłej nie da się określić, gdyż renta zwykła nie posiada granicy dla  $n \rightarrow \infty$ .

$$PV_{rentywiecznej} = \frac{PMT}{r}$$

**Równowaga między składkami a wypłatami**

$$FVA_{n,r} = PVA_{m,r}$$

ponieważ

$$FVA_{n,r} = PMT * MWPR_n^r \quad \text{oraz} \quad PVA_{m,r} = EMT * MWOR_m^r$$

stąd

$$PMT * MWPR_n^r = EMT * MWOR_m^r$$

## ZADANIA

Zad. 1

Firma COMP została wyceniona na 200 000zł. Właścicielom złożono ofertę wykupu firmy: płatności w równych kwotach w ciągu 5 lat. Jaka powinna być wartość raty (annuity), jeśli stopa procentowa wynosi 25%?

Zad. 2

Inwestor poszukuje papieru wartościowego, który będzie mu dawał 50zł rocznie przy żądanej stopie zwrotu 10%. Ile powinien – może zapłacić za ten papier?

Zad. 3

Do banku wpłacono 15 000zł. Po upływie 4 lat zaczęto wpłacać dodatkowo na końcu każdego kwartału kwotę 500zł. Jaki powstanie kapitał po 7 latach? Bank stosuje kapitalizację kwartalną złożoną,  $r=12\%$

Zad. 4

Z konta, na którym zgromadzono kapitał w wysokości 100 000zł pobierano na początku każdego miesiąca 800zł. Jaki będzie stan konta po 5 latach, jeśli  $r=24\%$ , a kapitalizacja była złożona miesięczna.

Zad. 5

Wasza córka rozpocznie studia za 5 lat od dziś. Chcecie, żeby otrzymywała 1 500 zł na początku każdego roku jej studiów – przez 4 lata. Szacowana stopa zwrotu w ciągu rozważanego okresu wynosi 12%. Ile powinniście wpłacić teraz (jednorazowo), aby zabezpieczyć finansowo waszą córkę? Ile wpłacać przez 5 lat w równych ratach?

Zad. 6

Pracownik przez 8 lat poprzedzających przejście na emeryturę odkładał na fundusz emerytalny na początku każdego półrocza 600zł,  $r=12\%$ , kapitalizacji złożonej półrocznej. Jaką maksymalną rentę wieczystą wypłaconą na końcu każdego roku będzie mógł pobierać, jeśli w okresie wypłacania renty wieczystej fundusz oferuje 13% i kapitalizację złożoną roczną.

Zad. 7

Dzięki Twojej inwestycji w studia wyższe spodziewasz się lepiej zarabiać od 30 roku życia do emerytury w wieku 65 lat oraz uzyskiwać przez 15 lat wyższą emeryturę (łącznie 50 lat). Średnio spodziewasz się zarabiać lepiej o 50 zł miesięcznie. Na rynku w tym długim czasie spodziewasz się stóp zwrotu z inwestycji o podobnym ryzyku, 12%. Kwota zainwestowana w studia wynosi 4 500 zł. Ile wynosi wartość obecna netto NPV Twojej inwestycji?

Zad. 8

Fundusz "Spokojna Głowa" obiecuje, że będzie wypłacać Ci co roku 10 tys. zł przez 25 lat, pod warunkiem wpłacenia na jego konto 100 tys. zł. Sprawdź, czy przy zakładanej średniej rocznej stopie 10% warto skorzystać z tej oferty?

Zad. 9

Panu Stefanowi Rybickiemu pozostało pięć lat do przejścia na emeryturę. Dotychczas na swym koncie emerytalnym zgromadził 30 tys. zł. Wkład w funduszu emerytalnym oprocentowany jest według stopy 30% z roczną kapitalizacją odsetek. Pan Rybicki chciałby

otrzymywać emeryturę w wysokości 3 tys. złotych miesięcznie przez 10 lat. Ile powinien wpłacać miesięcznie (na początku każdego miesiąca) przez pozostałe lata pracy, by uskładana suma pozwoliła na uzyskanie pożądanej emerytury?

Zad. 10

Krystyna ma dostać w spadku po swym zmarłym wuju 120 tys. zł. Dostanie je pod jednym warunkiem: nie może rozwieść się ze swym mężem Janem. Rozwód, który jest już prawie sfinalizowany przyniósłby Krystynie roczne alimenty w wysokości 17 tys. zł. Co powinna zrobić Krystyna kierując się względami finansowymi. Przyjmij stopę dyskontową w wysokości 15%.

Zad. 11

Pięć lat temu Wiśniewski pożyczył Parzyszkowi 2 tys. zł. Umówili się wówczas, że odsetki będą wynosiły 2% miesięcznie. Parzyszek nie był w stanie (jak twierdzi) spłacać długu. Zaoferował w zamian, że będzie płacił Wiśniewskiemu 50 złotych miesięcznie dożywotnio (zakładam że spadkobiercy Parzyszka będą płacili spadkobiercom Wiśniewskiego). Oblicz, który z nich zyska na tej konwersji, przyjmując stopę dyskontową w wysokości 1 % miesięcznie.

Zad. 12

Jeśli ktoś oferuje Ci wypłacanie 10 tys. zł rocznie w nieskończoność, to za ile dzisiaj byłbyś skłonny z tej oferty zrezygnować? Przyjmij stopę dyskontową w wysokości 10%.

Zad. 13

Pracownik odkładał przez 11 lat poprzedzających przejścia na emeryturę na końcu każdego miesiąca 110 zł, przy  $r=13\%$ . Jaką max. rentę wieczystą kwartalną z góry można pobrać?

Zad. 14

W ciągu 11 ostatnich lat pracy przeznaczamy na fundusz emerytalny 1000 zł na koniec każdego roku. Ile będzie wynosić nasza emerytura (wypłacana w równych ratach pod koniec każdego roku przez 10 lat) jeżeli fundusz ma  $r=10\%$  i kapitalizacja była złożona roczna.

Zad. 15

Pewien bank w zamian za ulokowanie 10 000 zł proponuje wypłaty co roku przez 10 lat (pierwsza płatność za rok) 2 000 zł. Jakie jest oprocentowanie tej lokaty?